GymSE Guide

Contents

1 Vägledning till GymSE paketet

1.1 Installation

Vi utgår ifrån att GymSE-paketet är installerat på din dator. När du skall använda paketet, måste detta läsas in till ditt Maple-dokument med kommandot

$with(GymSE)$

$$[Cos, ExpReg, Fcdf, Fpdf, Gini, KPplot, KvadReg, LPplot, LinReg, LogistReg, MultiLinReg, NormReg, PolyReg, PotensReg, PowReg, PropReg, QQplot, Sin, TVM, Tan, absolutFrekvens, amortAmort, amortTabell, antalobs, arcCos, arcSin, arcTan, arealP, arealT, art, avrunda, balansAmort, bidrag, bincdf, binomialTest, binpdf, boxplot, cart2pol, chi2GOFtest, chi2Kritisktvärde, chi2Sim, chi2Testvärde, chi2Utest, chicdf, chipdf, det, dotP, enhetsvektor, ev, fTabell, fintervallsolve, fraktil, frekvensTabell, förväntad, genomsnitt, gradient, hat, intervallPlot, intervallsolve, invCos, invF, invSin, invTan, invbin, invchi, invnorm, invt, irr, klassindData, konfidensIntervall, kumuleradRelativFrekvens, kvartiler, len, längd, lådagram, medelvärde, median, nivåkurvor, nollställen, normalcdf, normalpdf, npv, omskrivKP, plotHistogram, plotLorenzkurva, plotResidualer, plotStolpdiagram, plotSummapolygon, plotTrappstegskurva, pol2cart, polygonOmråde, proj, punktPlot, reellSolve, relativFrekvens, residualQQplot, residualer, residualspridning, riktningsfält, räntaAmort, skugga, spredning, standardavvikelse, stikprøvespredning, stolpdiagramBIN, summapolygon, tIntervall, tTest, tabellsumma, tangentplan, tcdf, testLin, tpdf, trappstegskurva, trappstegskurvaBIN, triangelsolve, typintervall, typvärde, varians, vektorPlot, vinkel, visaMatris, vsolve, zIntervall, zIntervallAndel, zTest] \tag{1.1}$$

Vanligtvis sättes ett kolon ut efter $with(GymSE)$, så du slipper att se namnen på alla kommandon i paketet. Så här kommer det att se ut:

$with(GymSE):$

GymSE-paketet består av en rad rutiner, som skall göra arbetet med Maple mer bekvämt inom

- Deskriptiv statistik
- Regressioner
- Trigonometri
- Vektorräkning
- Finans
- Statistiska test
- Ekvationslösning

Nedan behandlas några av GymSE-paketets rutiner, uppdelade efter ovanstående rubriker. Beskrivningarna, som beledsagas av små instruktiva exempel, omfattar inte alla detaljer.

För en mer omfattande beskrivning hänvisas till on-line-hjälpen i Gym-paketet.

1.2 Online-hjälp

Du skriver bara

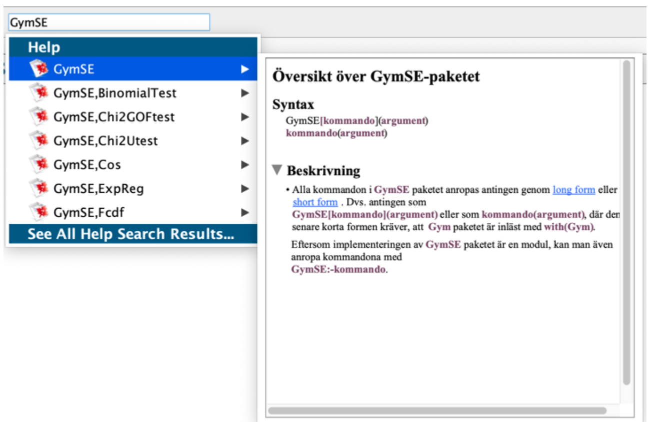
?*GymSE*

(i math-mode) och sedan Enter. Sedan kan du navigera i online-hjälpen genom hyperlänkar.

Du kan även nå hjälpen genom topp-menyn **Help > Maple Help** - eller genom att klicka på ? ikonen på verktygsraden:

Då hamnar du i Maples hjälpsystem, där du i översikten hittar en länk till GymSE.

Dessutom kan du skriva GymSE i sökfältet i verktygsraden och därifrån komma till Gym-paketets online-hjälp:



2 Deskriptiv statistik

2.1 Ej klassindelade observationsmaterial

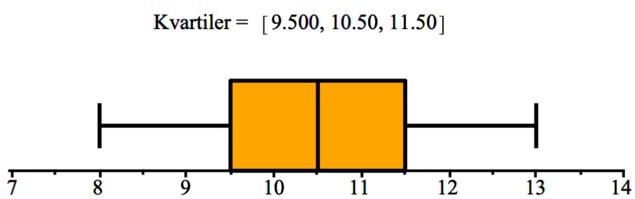
Du kan mata in data i en lista, en vektor, en matris eller läsa in data från en extern fil (till exempel i Excel-format). Här ligger data i en lista, som inte behöver vara sorterad:

$with(GymSE):$

$obs := [8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 13]:$

Du kan rita ett lådagram direkt efter rådata, och kvartiler och median beräknas:

$\text{lådagram}(obs)$



Om du vill beräkna frekvenser och kvartiler, kan du göra så här:

Absoluta och relativa frekvenser får du så här (du kan även använda A ($absolutFrekvens$) som input till $relativFrekvens$):

$$A := absolutFrekvens(obs) = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 10 & 5 \\ 11 & 5 \\ 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R := relativFrekvens(obs) = \begin{bmatrix} 8 & 0.100 \\ 9 & 0.150 \\ 10 & 0.250 \\ 11 & 0.250 \\ 12 & 0.100 \\ 13 & 0.150 \end{bmatrix}$$

$$relativFrekvens(A) = \begin{bmatrix} 8 & 0.100 \\ 9 & 0.150 \\ 10 & 0.250 \\ 11 & 0.250 \\ 12 & 0.100 \\ 13 & 0.150 \end{bmatrix}$$

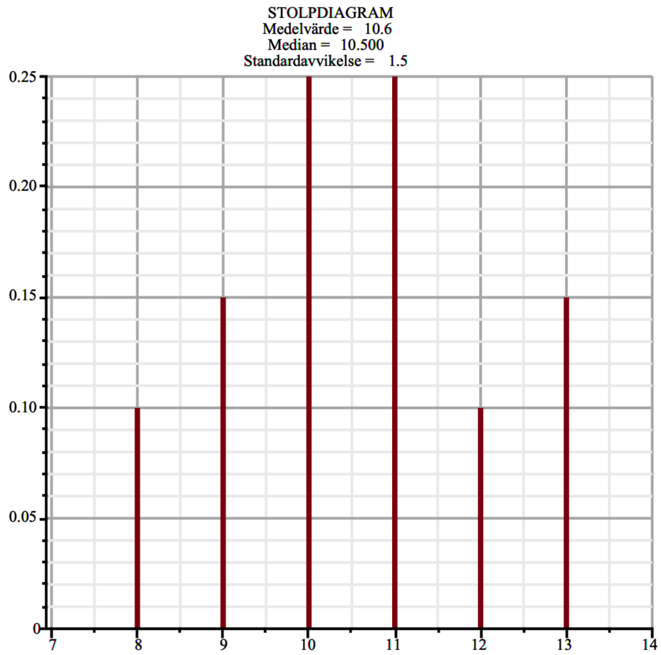
$$kumuleradRelativFrekvens\ (R) = \begin{bmatrix} 8 & 0.100 \\ 9 & 0.250 \\ 10 & 0.500 \\ 11 & 0.750 \\ 12 & 0.850 \\ 13 & 1. \end{bmatrix}$$

Du kan göra allt med ett enda kommando, men du kan då inte använda tabellen i senare beräkningar, eftersom endast text skrivs ut

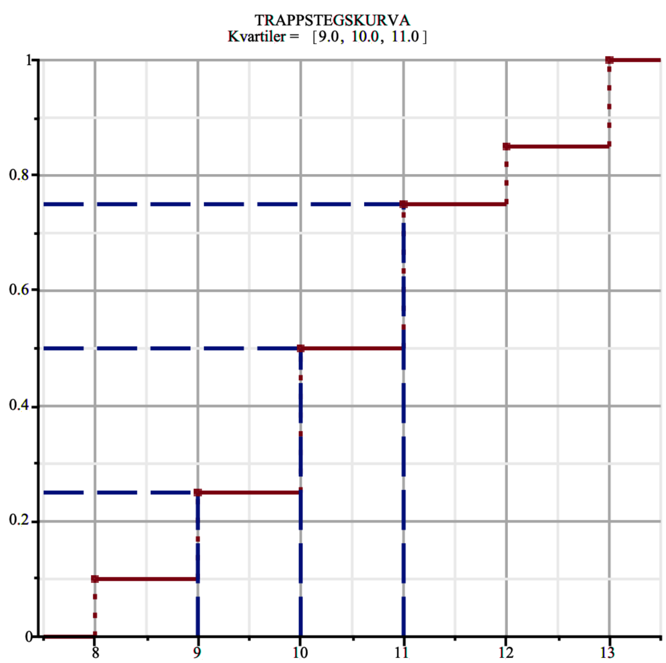
$frekvensTabell\,(obs, output = tabell)$:

Stolpdiagrammet och trappstegskurvan görs så här (istället för A kan du använda R eller rådata *obs*)

plotStolpdiagram (A)



plotTrappstegskurva (R)



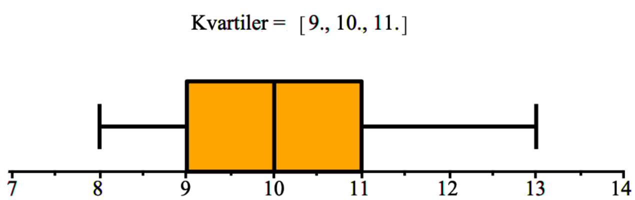
Lägg märke till att du inte får samma median och kvartiler som i *lådagram(obs)* ovan, eftersom två olika metoder används (läs mer om detta i online-hjälpen):

Vid direkt beräkning av median och kvartiler skall du ange vilken metod du vill använda.	*kvartiler* (*obs*) = [9.5000 , 10.500 , 11.500]

Lådagram-metoden är standard vid rådata:	
Är det data i en frekvenstabell är trappstegskurve-metoden standard:	$kvartiler(A) = [9.5000, 10.500, 11.500]$
Om du vid beräkning av median och kvartiler med rådata vill använda trappstegskurve-metoden, skall du tillfoga en parameter:	$kvartiler(obs, metod = 1) = [9., 10., 11.]$
och om du vill tvinga Maple att använda lådagram-metoden, där trappstegskurvemetoden är standard, skall du tillfoga en parameter:	$kvartiler(A, metod = 2) = [9.5000, 10.500, 11.500]$

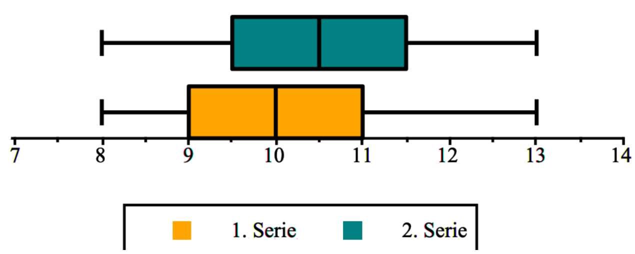
Vill du rita ett lådagram på basis av median och kvartiler bestämda genom trappstegskurvemetoden, tillfogar du en parameter:

$lådagram(obs, metod = 1)$



Dessa två metoder kan jämföras i ett kombinerat lådagram

$lådagram([obs, metod = 1], [obs, metod = 2])$



Stolpdiagrammet och trappstegskurvan ger information om medelvärde, median, kvartiler och standardavvikelse. Dessa (och övriga deskriptorer) kan även beräknas direkt:

$medelvärde(obs) = 10.55000000$

$standardavvikelse(obs) = 1.49916643505650$

$typvärde(obs) = [10, 11]$

Även fraktiler kan beräknas. Till exempel 0.6-fraktilen så här - här skall en frekvenstabell användas

$fraktil(A, 0.6) = 11$

$fraktil(R, 0.6) = 11$

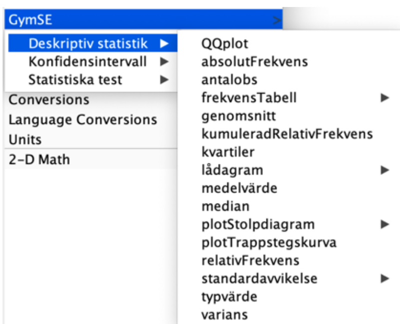
Funktionsuttrycket för trappstegskurvan bestäms så här:

$trappstegskurva\ (R, x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 8 \\ 0.100000000000000 & 8 \leq x < 9 \\ 0.250000000000000 & 9 \leq x < 10 \\ 0.500000000000000 & 10 \leq x < 11 \\ 0.750000000000000 & 11 \leq x < 12 \\ 0.850000000000000 & 12 \leq x < 13 \\ 1 & 13 \leq x \end{cases} \qquad (2.1)$$

2.2 Ej klassindelade observationsmaterial (med kontextmenyn)

Du kan göra det mesta i deskriptiv statistik enbart med hjälp av kontextmenyn. Här ser du möjligheterna:



$with(GymSE):$

$obs := [8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 13]:$

De absoluta frekvenserna hos data i *obs* kan beräknas med menyvalet **GymSE # Deskriptiv Statistik # absolutFrekvens**:

$$obs \xrightarrow{absolutFrekvens} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 10 & 5 \\ 11 & 5 \\ 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$

Om du vill kalla matrisen med de absoluta frekvenserna för till exempel A, sker detta genom att välja **Assign to a Name** i kontextmenyn och skriva A i den dialogbox som kommer fram

$$obs \xrightarrow{absolutFrekvens} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 10 & 5 \\ 11 & 5 \\ 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{assign to a name}} A$$

Härefter kan du använda variabeln A för fortsatta beräkningar, till exempel

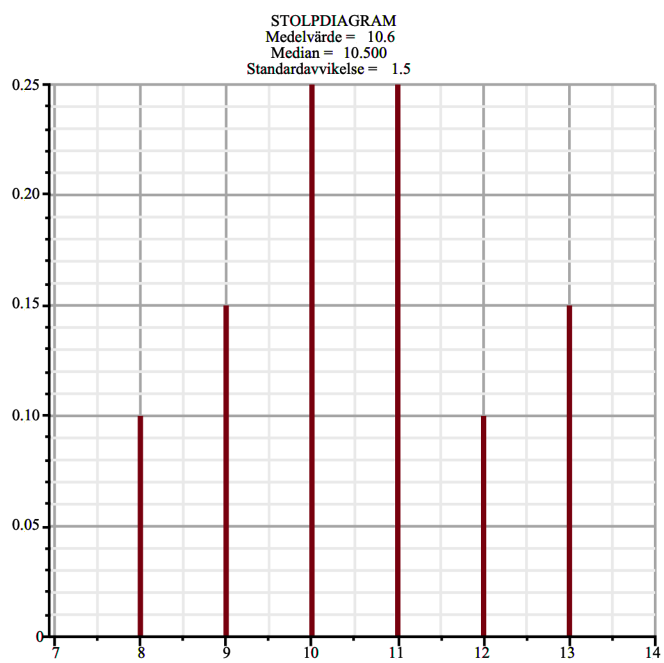
$$A \xrightarrow{relativFrekvens} \begin{bmatrix} 8 & 0.100 \\ 9 & 0.150 \\ 10 & 0.250 \\ 11 & 0.250 \\ 12 & 0.100 \\ 13 & 0.150 \end{bmatrix}$$

Du kan få allt med menyvalet **GymSE # Deskriptiv Statistik # frekvensTabell # tabell,** men tabellen kan dock inte användas i senere beräkningar eftersom den består av text:

$$obs \xrightarrow{frekvensTabell}$$

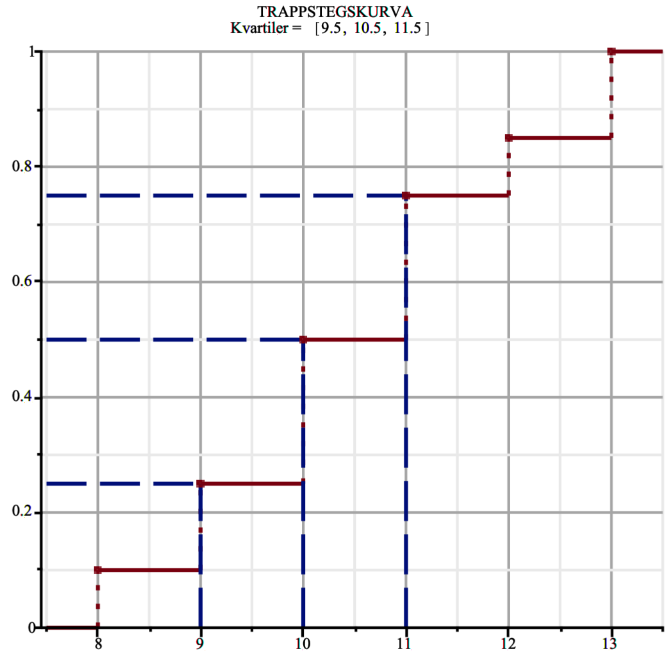
Ett stolpdiagram ritas med menyvalet **GymSE # Deskriptiv Statistik # plotStolpdiagram # procent**, där valet **procent** betyder, att det är stolpdiagrammet för de relativa frekvenserna som plottas. Väljer du i stället **antal** så är det de absoluta frekvenserna som plottas:

$$obs \xrightarrow{Stolpdiagram}$$



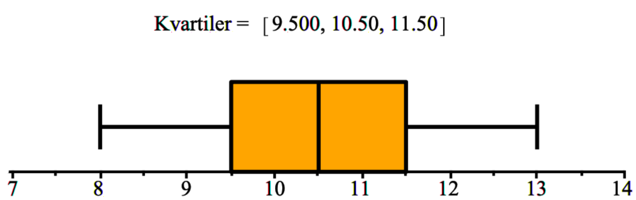
Trappstegskurvan plottas med menyvalet **GymSE # Deskriptiv Statistik # plotTrappstegskurva**:

$obs \xrightarrow{\textit{Trappstegskurva}}$



Ett lådagram plottas med menyvalet **GymSE # Deskriptiv Statistik # lådagram # standard**:

$obs \xrightarrow{\textit{lådagram}}$



Du kan beräkna alla de sedvanliga deskriptorerna med kontextmenyn

$obs \xrightarrow{\textit{medelvärde}}$ 10.55000000

$obs \xrightarrow{\textit{median}}$ 10.500

$obs \xrightarrow{\textit{kvartiler}}$ [9.5000 , 10.500 , 11.500]

$obs \xrightarrow{\textit{standardavvikelse}}$ 1.49916643505650

0.6-fraktilen beräknas genom (kom ihåg att de relativa frekvenserna används – om du använder variabeln *obs* här kommer fraktil inte att visas i kontextmenyn)

$A \xrightarrow{fraktil} p = 0.6\ 11$

där 0.6 skall skrivas i den dialogbox som dyker upp.

2.3 Klassindelade observationsmaterial

Data kan klassindelas med funktionen *klassindData* :

$with(GymSE):$

$obs := [21.3, 13.7, 7.4, 13.4, 12.8, 9.2, 8.9, 4.2, 15.5, 11.9, 18.2, 14.1, 10.9, 21.7, 10.1, 10.2, 4.2, 23.3, 21.7, 9.9, 16.1, 22.4, 8.5, 13.1, 15.3, 19.0, 14.4, 15.6, 18.2, 14.9, 10.8, 13.7, 11.5, 24.8, 13.7, 14.6, 21.1, 10.1, 24.7, 15.6, 17.2, 12.4, 16.1, 12.9, 15.2, 24.9, 26.1, 19.4, 19.4, 10.7]:$

Börja med att bestämma den minsta och den största observationen:

$\min(obs) = 4.2$

$\max(obs) = 26.1$

Alla observationerna ligger i intervallet $[0, 30]$. Dette intervall delas upp i delintervall med längden 5, och observationerna klassindelas därför i 6 grupper:

$$G := klassindData(obs, 0..30, 6) = \begin{bmatrix} 0..5. & 2 \\ 5...10. & 5 \\ 10...15. & 20 \\ 15...20. & 13 \\ 20...25. & 9 \\ 25...30 & 1 \end{bmatrix}$$

Om du har klassindelade data redan givna, skall du ange data i en matris med klassindelningen i den första kolonnen och motsvarande frekvenser (absoluta eller relativa) i den andra kolonnen:

Intervallens relativa och kumulerade frekvenser får du så här:

$$relativFrekvens(G) = \begin{bmatrix} 0..5. & 0.0400 \\ 5...10. & 0.100 \\ 10...15. & 0.400 \\ 15...20. & 0.260 \\ 20...25. & 0.180 \\ 25...30 & 0.0200 \end{bmatrix}$$

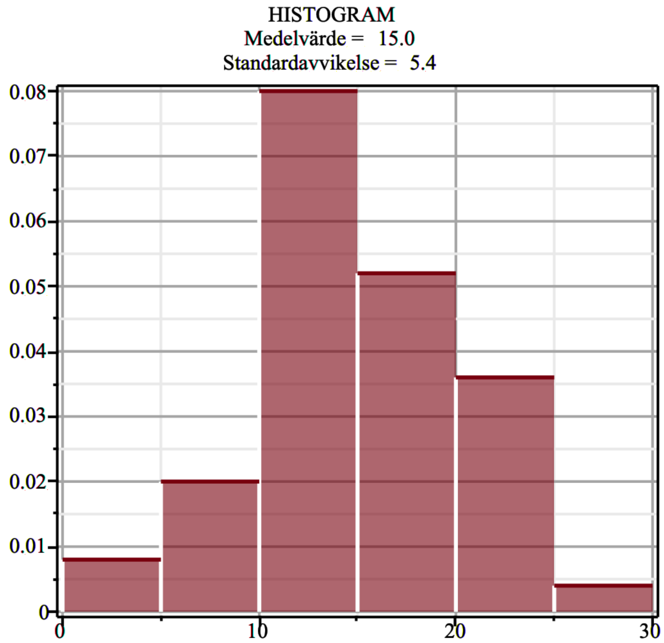
$$kumuleradRelativFrekvens\,(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5. & 0.0400 \\ 10. & 0.140 \\ 15. & 0.540 \\ 20. & 0.800 \\ 25. & 0.980 \\ 30 & 1. \end{bmatrix}$$

Du kan göra allt med ett enda kommando, men du kan då inte använda tabellen i senare beräkningar, eftersom endast text skrivs ut

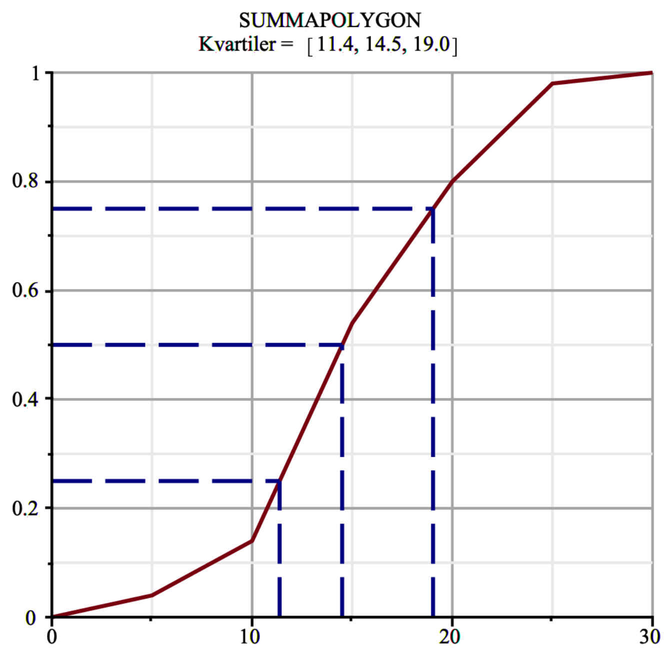
$frekvensTabell\,(G, output = tabell)$:

Histogram och summapolygon ritas:

plotHistogram (G)



plotSummapolygon (G)



Histogrammet och summapolygonen ger information om medelvärde, median, kvartiler och standardavvikelse. Dessa (och övriga deskriptorerI kan även beräknas direkt:

medelvärde $(G) = 15.0000000000000$

standardavvikelse $(G) = 5.40832691319598$

$typintervall(G) = [10. ..15.]$

Även fraktiler kan beräknas. Till exempel 0.6-fraktilen så här:

$fraktil(G, 0.6) = 16.15384615$

Funktionsuttrycket för trappstegskurvan bestäms så här:

$summapolygon(G, x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.00800000000000000\ x & 0 \le x < 5. \\ 0.0200000000000000\ x - 0.0600000000000000 & 5. \le x < 10. \\ 0.0800000000000000\ x - 0.660000000000000 & 10. \le x < 15. \\ 0.0520000000000000\ x - 0.240000000000000 & 15. \le x < 20. \\ 0.0360000000000000\ x + 0.0800000000000003 & 20. \le x < 25. \\ 0.00400000000000000\ x + 0.880000000000000 & 25. \le x < 30 \\ 1 & 30 \le x \end{cases} \tag{2.6}$$

Skall du avläsa värden på din summapolygon - till exempel värdet till 22 - så använder du kommndot:

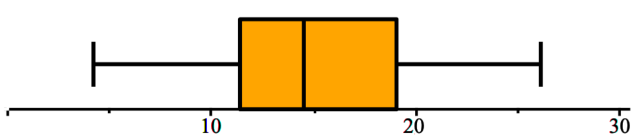
$summapolygon(G, 22) = 0.872000000000000$

som berättar att 87.2% av alla observationer är mindre än eller lika med 22.

Du kan även få ett lådagram för ett klasssindelat material. Här måste du dock ange minimum- och maximumvärdet, om de är kända, annars används (här) 0 och 30.

$lådagram(G, minmax = \{4.2, 26.1\})$

Kvartiler = [11.38, 14.50, 19.04]

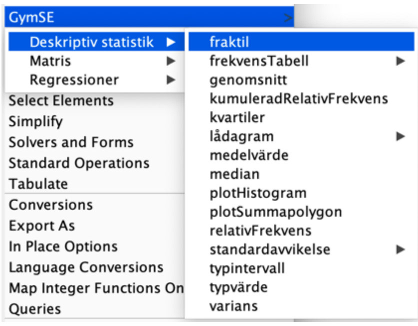


2.4 Klassindelade observationsmaterial (med kontextmenyn)

Du kan inte använda kontextmenyn för att klassindela data, härtill måste kommandot *klassindData* användas. Utgångspunkten är en matris på formen

$$G := \begin{bmatrix} 0..5. & 2 \\ 5. ..10. & 5 \\ 10. ..15. & 20 \\ 15. ..20. & 13 \\ 20. ..25. & 9 \\ 25. ..30 & 1 \end{bmatrix}:$$

Kontextmenyn är något annorlunda jämfört med den för ett icke-klassindelat observationsmaterial



men annars fungerer allt som beskrivet ovan under icke-klassindelat observationsmaterial.

3 Regression

3.1 Introduktion

GymSE-paketet innehåller 7 rutiner till regression:

- LinReg
- PropReg
- ExpReg
- PotensReg
- PolyReg
- KvadReg
- LogistReg

De är mycket flexibla och flera olika dataformat accepteras.

I de nedanstående exemplen anges indata i listor, men även vektorer, matriser och arrays kan användas (om data importeras från en extern fil).

Alla regressioner visas i ett standardfönster, som anpassas efter data (med undantag av *PolyReg*). Om du vill ändra detta, använder du parametern $view = [a..b, c..d]$. Se detaljer och exempel i online-hjälpen.

I alla nedanstående exempel startar vi med att läsa in GymSE-paketet. Det är givetvis inte nödvändigt att vi gör det i alla exempel, men vi gör det fr att understrycka att GymSE-paketet skall vara inläst – annars kommer inget av kommandorna att fungera.

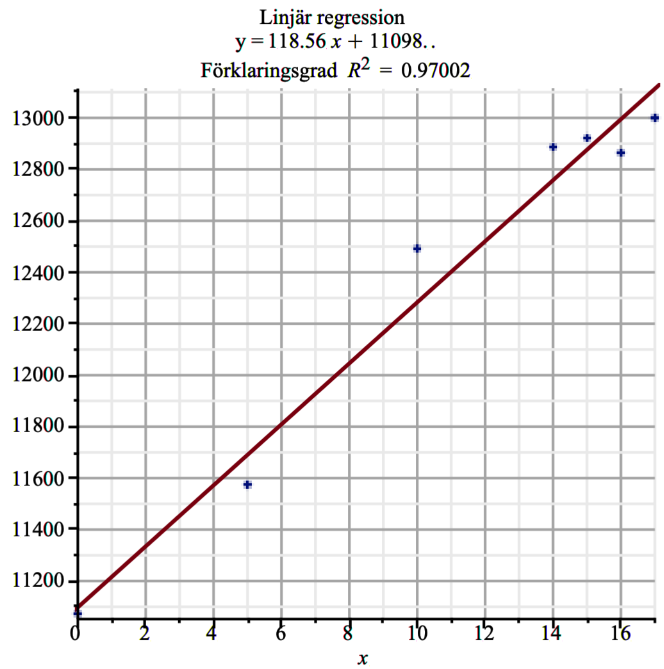
3.2 Linjär regression

$with(GymSE):$

$X := [0, 5, 10, 14, 15, 16, 17]:$

$Y := [11073, 11575, 12492, 12887, 12922, 12865, 13000]:$

$LinReg(X, Y)$



LinReg ger samtidigt regressionslinjens ekvation, förklaringsgraden och regressionslinjen tillsammans med datapunkterna.

Vill du definiera regressionsuttrycket som en funktion, görs detta genom att tillfoga det önskade namnet på den oberoende variabeln som en tredje parameter i *LinReg*. Till exempel

$LinReg(X, Y, x)$

$$118.561475409836 \; x + 11097.8237704918 \tag{3.1}$$

Om du vill beräkna värdet av regressionsuttrycket då $x = 20$ ersätter du bara x med 20 i $LinReg(X, Y, x)$:

$LinReg(X, Y, 20) = 13469.0532786885$

Vill du ha ett bekvämare namn för regressionsfunktionen, kan du definiera

$f(x) := LinReg(X, Y, x)$

$$f := x \mapsto LinReg(X, Y, x) \tag{3.2}$$

Du kan få tag i regressionskoefficienterna med

reg_koeff

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11097.8237704918 \\ 118.561475409836 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

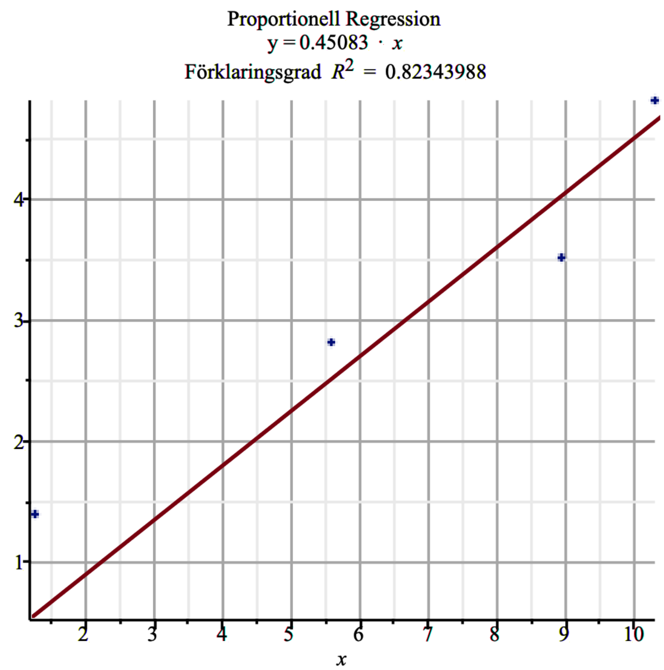
3.3 Proportionell regression

$with(GymSE)$:

$X := [1.26, 5.58, 8.94, 10.3]$:

$Y := [1.4, 2.82, 3.52, 4.82]$:

$PropReg(X, Y)$



PropReg ger samtidigt regressionslinjens ekvation, förklaringsgraden och regressionslinjen tillsammans med datapunkterna.

Vill du definiera regressionsuttrycket som en funktion, görs detta genom att tillfoga det önskade namnet på den oberoende variabeln som en tredje parameter i *PropReg* . Till exempel

$PropReg(X, Y, x)$

$$0.4508342416\ x \tag{3.4}$$

Om du vill beräkna värdet av regressionsuttrycket då $x = 5$, ersätter du bara x med 5 i $PropReg(X, Y, x)$:

$PropReg(X, Y, 5) = 2.254171208$

Vill du ha ett bekvämare namn för regressionsfunktionen, kan du definiera

$f(x) := PropReg(X, Y, x)$

$$f := x \mapsto PropReg(X, Y, x) \tag{3.5}$$

Du kan få tag i regressionskoefficienten med

reg_koeff

$$a = 0.4508342416 \tag{3.6}$$

$$a = 0.4508342416 \tag{3.7}$$

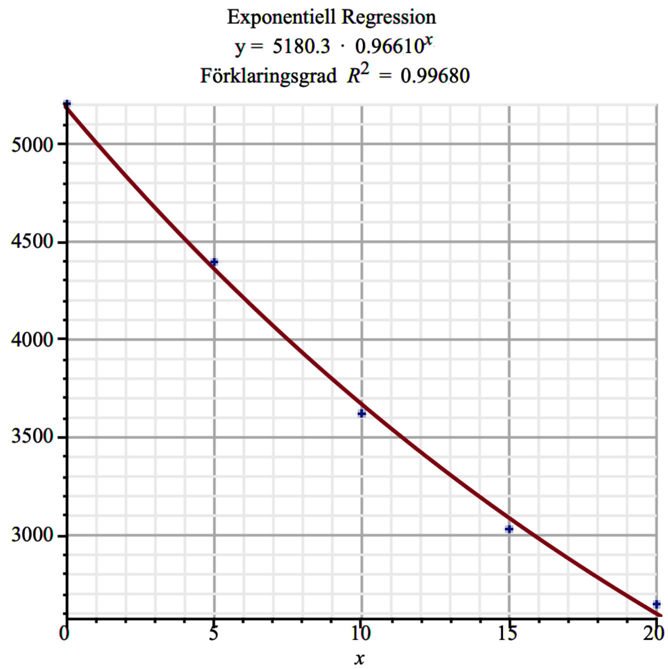
3.4 Exponentiell regression

$with(GymSE):$

$X := [0, 5, 10, 15, 20]:$

$Y := [5205, 4397, 3622, 3031, 2647]:$

$ExpReg(X, Y)$



ExpReg ger samtidigt regressionsekvationen, förklaringsgraden och en graf med regressionslinjen tillsammans med datapunkterna.

Om du vill ha en logaritmisk skala på y-axeln ställer du in detta under **Axes # Properties...** i kontextmenyn (välj **vertical** för inställning av y-axeln)..

Vill du definiera regressionsuttrycket som en funktion, görs detta genom att tillfoga det önskade namnet på den oberoende variabeln som en tredje parameter i *ExpReg* . Till exempel

$ExpReg(X, Y, t)$

$$5180.28826541937 \quad 0.966099634291293^{t} \tag{3.8}$$

Du kan också få regressionsfunktionen utryckt med hjälp av basen för den naturliga logaritmen:

$ExpReg(X, Y, t, exponentiell)$

$$5180.28826541937 \quad \mathrm{e}^{-0.0344883090000001\, t} \tag{3.9}$$

Om du vill beräkna värdet av regressionsuttrycket då $t = 7$, ersätter du bara t med 7 i $ExpReg(X, Y, t)$:

$ExpReg(X, Y, 7) = 4069.18421755868$

Vill du ha ett bekvämare namn för regressionsfunktionen, kan du definiera

$f(x) := ExpReg(X, Y, t)$

$$f := x \mapsto ExpReg(X, Y, t) \tag{3.10}$$

Du kan få tag i regressionskoefficienterna med

reg_koeff

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5180.28826541937 \\ 0.966099634291293 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

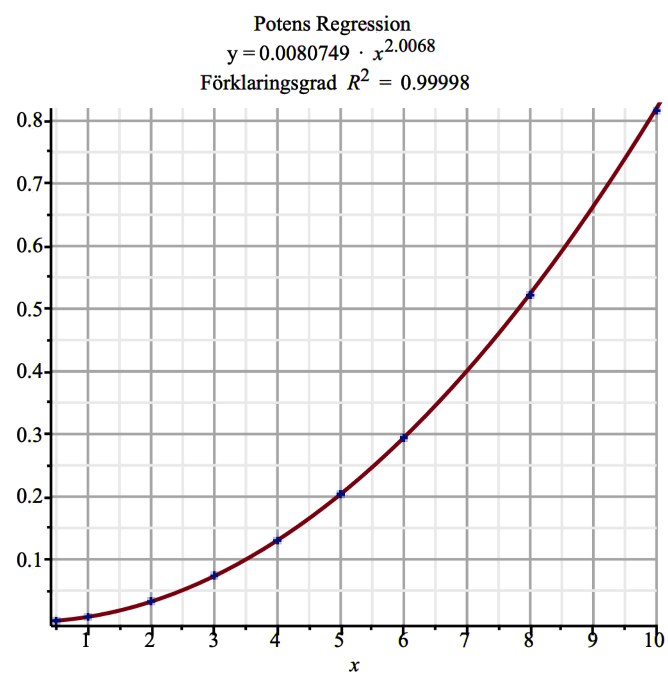
3.5 Potensregression

$with(GymSE):$

$X := [0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10]:$

$Y := [0.002, 0.008, 0.033, 0.074, 0.130, 0.204, 0.294, 0.522, 0.816]:$

$PotensReg(X, Y)$



PotensReg ger samtidigt regressionsekvationen, förklaringsgraden och en graf med regressionslinjen tillsammans med datapunkterna.

Om du vill ha logaritmiska skalor på axlarna så klickar du i grafen, och både x-axeln och y-axeln ställs in till logaritmisk under **Axes # Properties...** i kontextmenyn.

Vill du definiera regressionsuttrycket som en funktion, görs detta genom att tillfoga det önskade namnet på den oberoende variabeln som en tredje parameter i *PotensReg* . Fx

$PotensReg(X, Y, x)$

$$0.00807487866766576\ x^{2.00675834882888} \tag{3.12}$$

Om du vill beräkna värdet av regressionsuttrycket då $x = 9$, ersätter du bara x med 9 i $PotensReg(X, Y, x)$:
$PotensReg(X, Y, 9)$

$$0.663850257440628 \tag{3.13}$$

Vill du ha ett bekvämare namn för regressionsfunktionen, kan du definiera

$f(x) := PowReg(X, Y, x)$

$$f := x \mapsto PowReg(X, Y, x) \tag{3.14}$$

Du kan få tag i regressionskoefficienterna med

reg_koeff

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00807487866766576 \\ 2.00675834882888 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

3.6 Polynomiell regression

Med *PolyReg* kan du anpassa data till ett andragradspolynom, et tredjegradspolynom, osv. Använder du *PolyReg* till att anpassa till ett förstagradspolynom, svarer dette helt mot linjär regression.

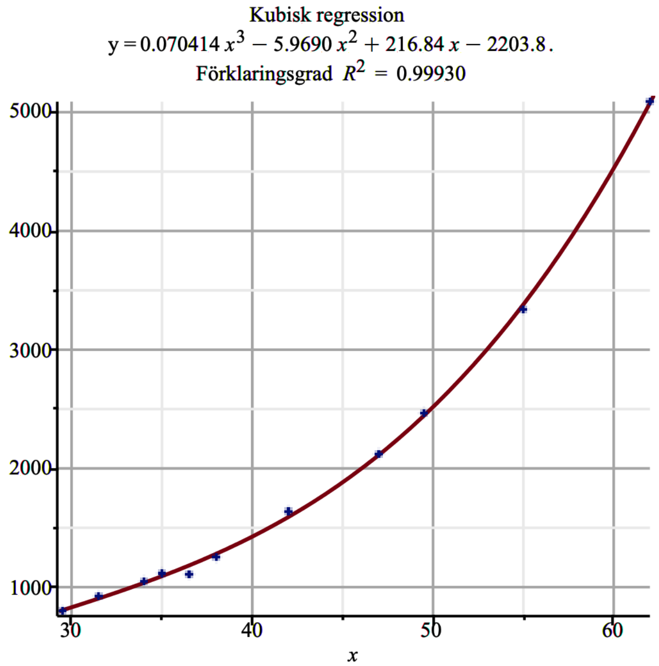
Låt oss som ett exempel studera anpassning till ett tredjegradspolynom:

$with(GymSE):$

$X := [29.5, 31.5, 34.0, 35.0, 36.5, 38.0, 42.0, 47.0, 49.5, 55.0, 62.0]:$

$Y := [801, 925, 1050, 1116, 1109, 1253, 1638, 2122, 2467, 3339, 5089]:$

$PolyReg(X, Y, 3)$



Märk att denna regression kräver tre parametrar, där den sista anger polynomets grad (2 för andragrads etc)

Skall du använda regressionsuttrycket (utan graf) så använder du 4-parameterversionen:
$PolyReg(X, Y, 3, x)$

$$0.0704135769652087\, x^3 - 5.96901726882574\, x^2 + 216.840548412699\, x - 2203.81543711316 \tag{3.16}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$0.070414\, x^3 - 5.9690\, x^2 + 216.84\, x - 2203.8$$

Du kan få tag i regressionskoefficienterna med

reg_koeff

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2203.81543711316 \\ 216.840548412699 \\ -5.96901726882574 \\ 0.0704135769652087 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

3.7 Kvadratisk regression

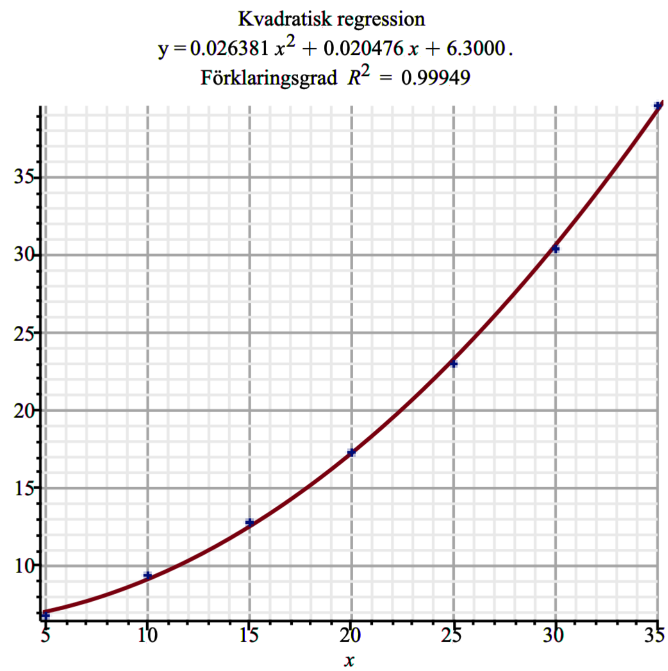
Med *KvadReg* kan du anpassa data till ett andragradspolynom.

$with(GymSE):$

$X := [5, 10, 15, 20, 25, 30, 35]:$

$Y := [6.8, 9.4, 12.8, 17.3, 23.0, 30.4, 39.6]:$

$KvadReg(X, Y)$



Skall du använda regressionsuttrycket (utan graf) så använder du 3-parameterversionen:
$KvadReg(X, Y, x)$

$$0.0263809523809524 \; x^2 + 0.0204761904761915 \; x + 6.29999999999999 \tag{3.18}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$0.026381 \; x^2 + 0.020476 \; x + 6.3000$$

Du kan få tag i regressionskoefficienterna med

reg_koeff

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.29999999999999 \\ 0.0204761904761915 \\ 0.0263809523809524 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.29999999999999 \\ 0.0204761904761915 \\ 0.0263809523809524 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

3.8 Logistisk regression

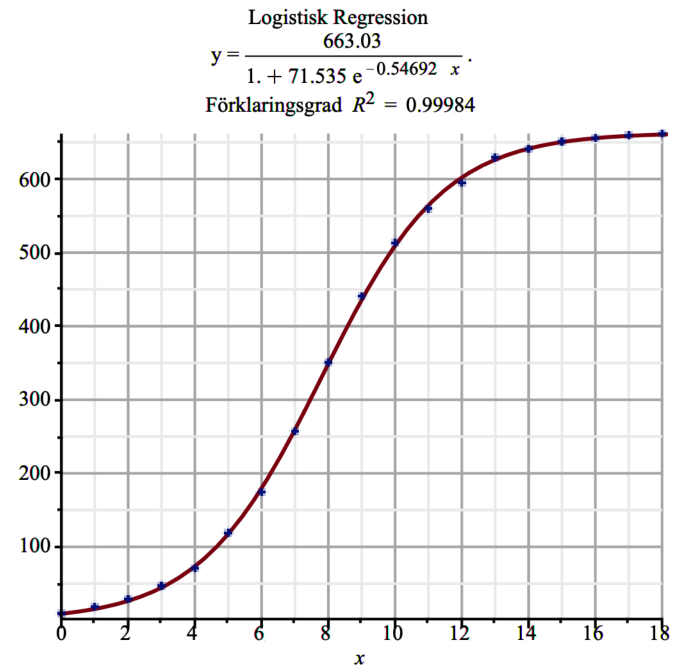
Anpassning av data tilt en logistisk funktion kan ske med $LogistReg$:

$with(GymSE):$

$X := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]$:

$Y := [9.6, 18.6, 29.0, 47.2, 71.1, 119.1, 174.6, 257.3, 350.7, 441.0, 513.3, 559.7, 594.8, 629.4, 640.8, 651.1, 655.9, 659.6, 661.8]$:

LogistReg(X, Y)



Om du bara vill ha funktionsuttrycket använder du:

LogistReg(X, Y, x)

$$\frac{663.032900348140}{1 + 71.5350642335871 \, e^{-0.546919002535064 x}} \tag{3.21}$$

Du kan få tag i regressionskoefficienterna med

reg_koeff

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71.5350642335871 \\ 0.546919002535064 \\ 663.032900348140 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

3.9 Regressionsanalys

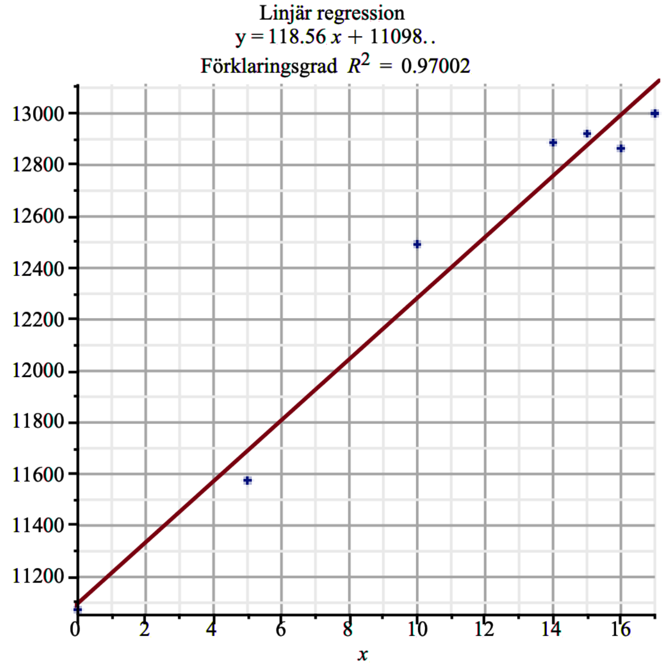
Vi nöjer oss här med att visa hur regressionsanalysen föregår vid en linjär rgression. Övriga regressionstyper behandlas analogt.

with$(GymSE)$:

$X := [0, 5, 10, 14, 15, 16, 17]$:

$Y := [11073, 11575, 12492, 12887, 12922, 12865, 13000]:$

$LinReg(X, Y)$

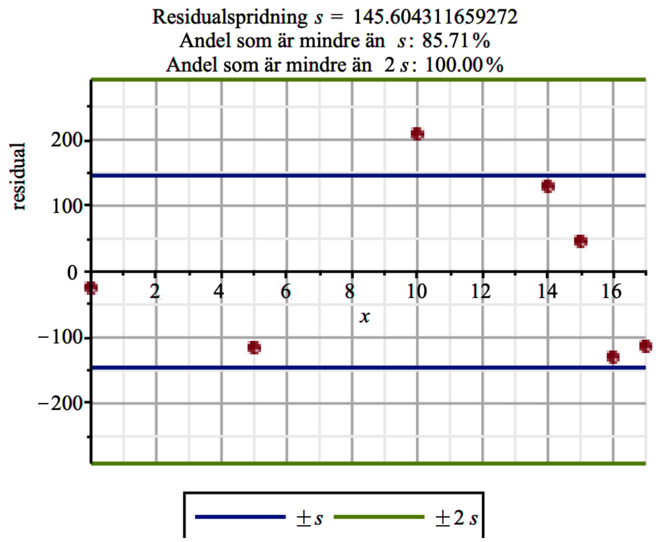


Du kan beräkna residualerna (differenserna mellan indata och regressionsvärdena) med kommandot *residualer* (*X*, *Y*, *LinReg*)

residualer (*X*, *Y*, *LinReg*)

$$\begin{bmatrix} 0 & -24.8237704917956 \\ 5 & -115.631147540978 \\ 10 & 208.561475409839 \\ 14 & 129.315573770495 \\ 15 & 45.7540983606577 \\ 16 & -129.807377049179 \\ 17 & -113.368852459016 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

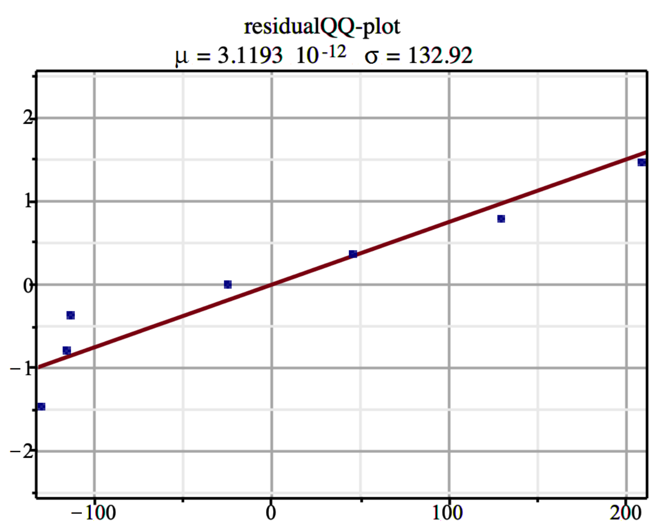
och du kan plotta residualerna med (du behöver inte beräkna residalerna först – det sker automatisk) *plotResidualer* (*X*, *Y*, *LinReg*)



Över grafen får du upplysning om residualspridningen. Denna kan även beräknas direkt med

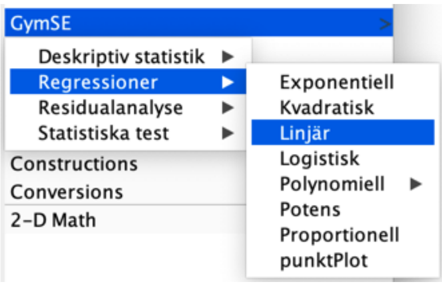
residualspridning (*X*, *Y*, *LinReg*) = 145.604311659272

För att undersöka om residualerna är normalfördelade kan du använda QQplot. Denna plot kan du göra direkt från data i X och Y:



3.10 Regression med kontekstmenyn

Vi visar här hur en linjär regression och regressionsanalys görs med kontekstmenen.



Om data anges som två listor, två vektorer eller en matris är likgiltigt.

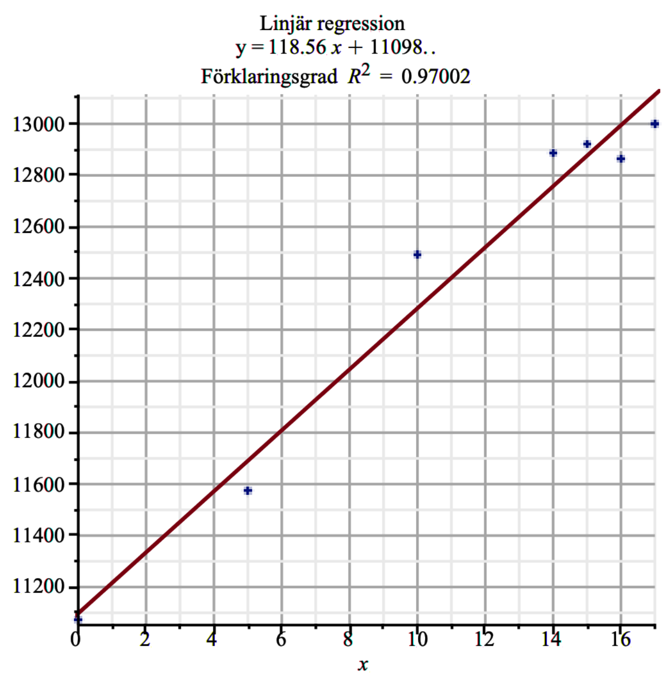
$with(GymSE):$

$X := [0, 5, 10, 14, 15, 16, 17]:$

$Y := [11073, 11575, 12492, 12887, 12922, 12865, 13000]:$

Skriv de två listorna i math-mode åtskiljt av komma och gör valet **GymSE # Regressioner # Linjär** i kontextmenyn

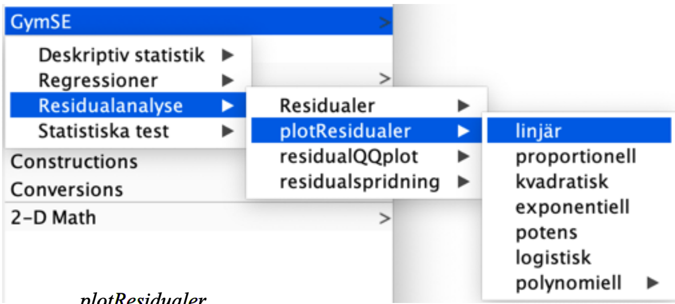
$X, Y \xrightarrow{LinReg}$



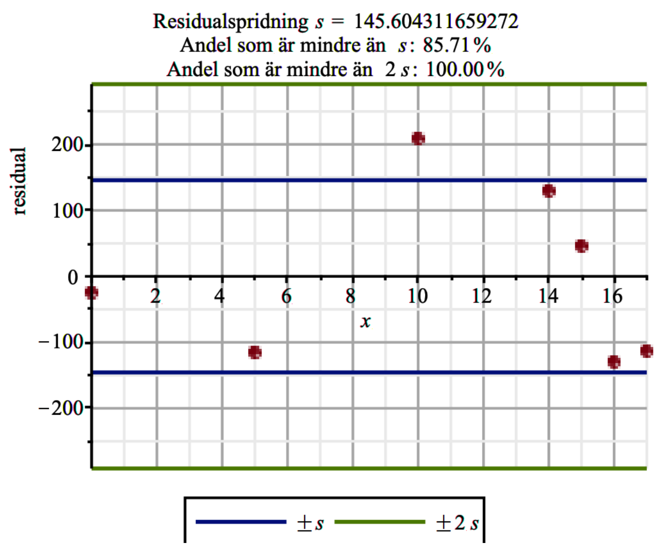
Övriga regressioner hanteras analogt – bortsett från *PolyReg* som även kräver att en grad anges.

Nederst på listan över regressioner uppträder punktPlot. Denna kan användas om du endast vill plotta data (utan regressionsfunktionens graf).

Du kan även göra residualanalys med hjälp av kontextmenyerna. Till exempel gör du en residualplot för den linjära regressionen med menyvalet



$X, Y \xrightarrow{plotResidualer}$



och beräknar residualspridningen direkt med

$X, Y \xrightarrow{residualspridning} 145.604311659272$

4 Trigonometri

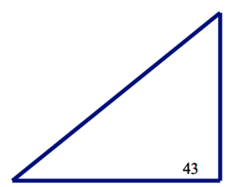
4.1 Introduktion

Maple-funktionerna **sin**, cos och tan räknar i radianer, vilket inte är ändamålsenligt i trigonometri. För att slippa konvertera enheten grader till radianer finns i GymSE-paketet funktionerna Sin, Cos och Tan, som räknar i grader. I GymSE-paketet finns även de inversa funktionerna invSin, invCos och invTan, som fungerar som på en miniräknare.

Lägg märke till att funktionerna Sin, Cos och Tan skall skrivas med stor begynnelsebokstav. Om du skriver med liten begynnelsebokstav så räknar funktionerna i radianer.

Dessutom innehåller GymSE-paketet kommandot ***triangelsolve*** som klarar triangelberäkningar utan synlig användning av sinus, cosinus och tangens.

4.2 Rätviklig triangel

I den rätvinkliga triangeln ABC är $C = 90°$, $c = 43$ och $a = 27$ Beräkna A, B och b.	

Det snyggaste sättet att arbeta är kanske att utnyttja definitionen av $Sin(A)$ i en rätvinklig triangel och direkt sätta in de givna sidornas längder och sedan klicka:

$with(GymSE)$:

$$Sin(A) = \frac{27}{43} \xrightarrow{\text{solutions for A}} 38.89587133 \xrightarrow{\text{assign to a name}} A$$

Det vill säga att $\angle A = 38.9°$

På motsvarande sätt bestäms vinkeln B:

$$Cos(B) = \frac{27}{43} \xrightarrow{\text{solutions for B}} 51.10412867 \xrightarrow{\text{assign to a name}} B$$

Dvs. att $\angle B = 51.1°$

Slutligen bestäms b:

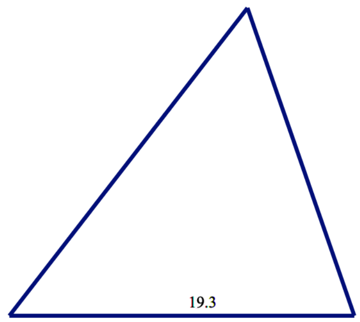
$$Cos(A) = \frac{b}{43} \xrightarrow{\text{solutions for b}} 33.46640107 \xrightarrow{\text{assign to a name}} b$$

Längden av sidan b är således $b = 33.46$

4.3 Godtycklig triangel

Beräkna de obekanta elementen i triangeln ABC när

$A = 52.3°$, $b = 17.1$ og $c = 19.3$.



Börja med att skriva cosinus-satsen, där du direkt sätter in de kända värdena (du måste kanske radera variabeln a först, till exempel genom *unassign* ('a'))

unassign ('a')

$$a^2 = 19.3^2 + 17.1^2 - 2 \cdot 19.3 \cdot 17.1 \cdot Cos(52.3) \xrightarrow{\text{solutions for a}} 16.16339884, -16.16339884 \xrightarrow{\text{select entry 1}} 16.16339884 \xrightarrow{\text{assign to a name}} a$$

För att beräkna vinklarna kan både sinus- och cosinussaten användas, men det säkraste är att använda cosinussatsen, eftersom den endast ger den enda användbara lösningen (se OBS nedanför):

$$Cos(C) = \frac{a^2 + 17.1^2 - 19.3^2}{2\, a \cdot 17.1} \xrightarrow{\text{solutions for C}} 70.86783053 \xrightarrow{\text{assign to a name}} C$$

Slutligen bestäms vinkeln B:

$$B := 180 - 52.3 - C = 56.83216947$$

OBS: Om du väljer att använda sinussaten för att bestämma B måste du vara observant. Ekvationen, som du ska lösa, har alltid två lösningar i intervallet $[0, 180]$ (om inte vinkeln är rät).

Använder vi sinussatsen får vi

$$\frac{Sin(C)}{19.3} = \frac{Sin(52.3)}{a}$$

Löser du denna ekvation med *solve*, får du endast en lösning (nämligen den i intervallet $[0, 90]$). Eftersom alla variabler vi skall beräkna redan är definierade, börjar vi med att radera variablerna A, B och C:

unassign ('A','B','C')

$$\frac{Sin(C)}{19.3} = \frac{Sin(52.3)}{a} \xrightarrow{\text{solve}} \{C = 70.86783050\}$$

För att få båda lösningarna, är det bäst att använda kommandot *intervallsolve* (som finns i GymSE-paketet):

$$intervallsolve\left(\frac{Sin(C)}{19.3} = \frac{Sin(52.3)}{a}, C = 0..180\right)$$

$$[70.86783050, 109.1321695] \tag{4.1}$$

Här kan vi inte utesluta lösningen 109.1, så vi måste även beräkna B

$$intervallsolve\left(\frac{Sin(B)}{17.1} = \frac{Sin(52.3)}{a}, B = 0..180\right)$$

$$[56.83216943, 123.1678306] \tag{4.2}$$

Nu kan vi hitta den kombination av vinklar, som ger en vinkelsummma på 180.

Om du föredrar att definiera de sidor och vinklar, som är kända, och sedan använda de generella sinus- och cosinus-satserna, är det inget som hindrar det. Kom bara ihåg att kontrollera, att de variabler du skall beräkna inte redan har tilldelats värden. Titta i paletten 'Variables', högerklicka på den variabel du vill radera, och välj 'unassign'.

Du hittar många fler exempel i online-hjälpen.

4.4 triangelsolve

De två uppgifter som vi just har löst, kan enkelt lösas med kommandot *triangelsolve* .

Då vi kan ha definierat en del av de variabler som vi skall använda, startar vi med att radera alla variabler och inläsa GymSE-paketet igen (då *restart* även raderar detta):

restart

with(*GymSE*) :

$$triangelsolve(b = 27, c = 43, C = 90)$$

$$\{A = 51.10412865, B = 38.89587134, a = 33.46640105\} \tag{4.3}$$

$$triangelsolve(b = 17.1, c = 19.3, A = 52.3)$$

$$\{B = 56.83216945, C = 70.86783056, a = 16.16339883\} \tag{4.4}$$

Du skall alltid vara noga med att de variabler du använder i triangelberäkningen är odefinierade. Det vill säga att i ovanstående exempel skall variablerna a, b, c, A, B och C vare odefinierade. Om triangeln i stället heter XYZ, skall variablerna x, y, z, X, Y och Z vara odefinierade. Med dessa namn kommer kommandot att bli

$$triangelsolve(y = 17.1, z = 19.3, X = 52.3, \text{"XYZ"})$$

$$\{Y = 56.83216945, Z = 70.86783056, x = 16.16339883\} \tag{4.5}$$

där du med "XYZ" förklarar att triangeln heter XYZ. Det behöver du inte göra om triangeln heter ABC.

5 Vektorräkning

5.1 2D-vektorer

$with(GymSE):$

Två vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är definierade genom

$$\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle -5, 4 \rangle = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Längden af $\vec{a}$	$längd(\vec{a}) = \sqrt{13}$ eller $len(\vec{a}) = \sqrt{13}$
Skalärproduktenmellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$ (se kommentar nedan)	$dotP(\vec{a}, \vec{b}) = 2$
Vinkeln mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$	$vinkel(\vec{a}, \vec{b}) = 85.03025926$
Projektionen a $\vec{a}$ på $\vec{b}$	$proj(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{bmatrix} -\frac{10}{41} \\ \frac{8}{41} \end{bmatrix}$
Arealen av den parallellogram, som utspänns av $\vec{a}$ och $\vec{b}$:	$arealP(\vec{a}, \vec{b}) = 23$
Arealen avden triangel, som utspänns av $\vec{a}$ og $\vec{b}$:	$arealT(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{23}{2}$
$\vec{a}$ till **polär form**	$cart2pol(\vec{a}) = [\sqrt{13}, 56.309]$
$\vec{c} := [2, 30]:$ från polär till rektangulär form (**cartesiska koordinater)**	$pol2cart(\vec{c}) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$
Tvärvektorn till $\vec{a}$	$hat(\vec{a}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$
Determinanten av $\vec{a}$ och $\vec{b}$	$det(\vec{a}, \vec{b}) = 23$

Enhetsvektor parallell med $\vec{a}$	$enhetsvektor\,(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$

Skalärprodukten mellan två vektorer kan beräknas som $\vec{a}.\vec{b}$, men denna implementering utnyttjar den komplexa skalärprodukten, och kan ge oönskade resultat i symbolska beräkningar.

Till exempel fås:

$$\vec{a} := \langle 2, t\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle -5\,t, 4\,\rangle = \begin{bmatrix} -5\,t \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = -10\,t + 4\,\bar{t}$$

där den vanliga skalärprodukten skulle ge $-6\,t$. För att hantera dessa situationer innehåller GymSE-paketet funktionen $dotP$:

$$dotP(\vec{a}, \vec{b}) = -6\,t$$

5.2 3D-vektorer

Två vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är definierade genom

$$\vec{a} := \langle 2, 3, -7\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle -5, 4, 3\rangle = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Längden av $\vec{a}$	$längd\,(\vec{a}) = \sqrt{62}$ eller $len(\vec{a}) = \sqrt{62}$
Skalärproduktenmellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$	$dotP(\vec{a}, \vec{b}) = -19$
Vinkeln mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$	$vinkel(\vec{a}, \vec{b}) = 109.9530536$

Projektionen av $\vec{a}$ på $\vec{b}$	$proj(\vec{a},\vec{b}) = \begin{bmatrix} \frac{19}{10} \\ -\frac{38}{25} \\ -\frac{57}{50} \end{bmatrix}$
Arealen av den parallellogram, som utspänns av $\vec{a}$ och $\vec{b}$:	$arealP(\vec{a},\vec{b}) = \sqrt{2739}$
Arealen avden triangel, som utspänns av $\vec{a}$ og $\vec{b}$:	$arealT(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\sqrt{2739}}{2}$
Enhetsvektor parallell med $\vec{a}$	$enhetsvektor(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{62}}{31} \\ \frac{3\sqrt{62}}{62} \\ -\frac{7\sqrt{62}}{62} \end{bmatrix}$
Kryssprodukten av $\vec{a}$ och $\vec{b}$ (är inbyggd i Maple och beräknas genom att utnyttja × från Common Symbols paletten)	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} 37 \\ 29 \\ 23 \end{bmatrix}$

5.3 Lösning av vektorekvationer (vsolve)

$with(GymSE):$

Tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är definierade genom

$\vec{a} := \langle 1, 2 \rangle : \vec{b} := \langle -1, 3 \rangle : \vec{c} := \langle -1, 13 \rangle :$

Lösning av ekvationen
$s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} = \vec{c}$

$$\begin{bmatrix} s - t \\ 2s + 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 13 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

sker med kommandot

$vsolve\left(s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} = \vec{c}, \{s, t\}\right)$

$$\{s = 2, t = 3\} \tag{5.2}$$

När elementen är tal, kan parameterlistan utlämnas utan problem:

$vsolve\left(s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} = \vec{c}\right)$

$$\{s = 2, t = 3\} \tag{5.3}$$

Är vektorerna parametriserade, till exempel

$\vec{a} := \langle x, 2\rangle : \vec{b} := \langle -1, 3\rangle : \vec{c} := \langle -1, 13\rangle :$

giver *vsolve* utan parameterlista

$vsolve\left(s\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{b} = \vec{c}\right)$

$$\left\{s = \frac{10}{3\,x+2}, t = \frac{13\,x+2}{3\,x+2}, x = x\right\} \tag{5.4}$$

och med parameterlista

$vsolve\left(s\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{b} = \vec{c}, \{s, t\}\right)$

$$\left\{s = \frac{10}{3\,x+2}, t = \frac{13\,x+2}{3\,x+2}\right\} \tag{5.5}$$

För 3D-vektorer fungerar det på samma sätt.

5.4 Vektorräkning med kontextmenyn

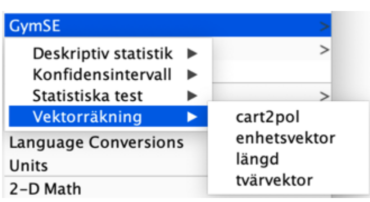
$with(GymSE) :$

Två vektorer $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är definierade genom

$\vec{a} := \langle 2, 3\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\vec{b} := \langle -5, 4\rangle = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$

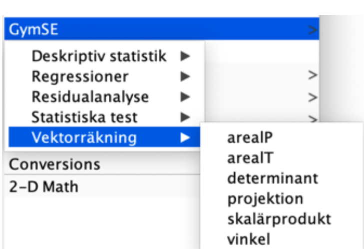
Om du utnyttjar kontextmenyn på en enskild 2D-vektor får du dessa möjligheter



Till exempel

$\vec{a} \xrightarrow{\text{längd}} \sqrt{13}$

Använder du i stället kontextmenyn på två vektorer åtskilda av ett komma får du dessa möjligheter:



Till exempel

$\vec{a}, \vec{b} \xrightarrow{\textit{vinkel}} 85.03025926$

Samma gäller 3D-vektorer – bortsett från att *cart2pol*, *tvärvektor* och *determinant* inte finns i menyerna.

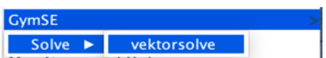
Du kan även lösa en vektorekvation med kontextmenyen. Till exempel:

$s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} = \langle -1, 13 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 2\,s - 5\,t \\ 3\,s + 4\,t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 13 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$\xrightarrow{\textit{vsolve}}$

$$\left\{ s = \frac{61}{23}, t = \frac{29}{23} \right\} \tag{5.7}$$



6 Finans

6.1 Introduktion

Alla uppgifter med enkel ränteberäkning, sparande, återbetalning av skuld, mm kan lösas med ett kommando, nämligen *TVM*. Input till detta kommando är

N	antal terminer
R%	räntan i procent per termin
NV	nuvärdet
PMT	annuiteten per termin
FV	framtidsvärdet
start	kan anta värdet *true* eller *false* beroende på om annuiteten skall betalas i slutet av en termin eller i starten av en termin. Standard är *false*.

Input skall innehålla värden för 4 av parametrarna N, R%, NV, PMT, FV för att kunna bestämma den återstående.
Innehåller input endast värden för 3 av variablerna N, R%, NV og FV, sätts PMT automatisk till 0

Eftersom det är sedvanlig kutym i samband med finansberäkningar, skall belopp du skall betala anges som negativa tal. Det är ju en utgift för dig.

I GymSE-paketet finns även finansiella funktioner som kan

- skriva ut en fullständig amorteringstabell
- bestämma räntan på ett annuitetslån för en given termin
- beräkna amorteringen på ett annuitetslån för en given termin
- beräkna restskulden i ett annuitetslån för en given termin
- beräkna nuvärdet av ett kassaflöde
- beräkna den inre räntan i ett kassaflöde

Se online hjälp för exempel och detaljer

6.2 Exempel 1

500 kr insättes på en konto till 3% per termin.

Vad har beloppet växt till på 12 terminer?

Här är de 500 kr pengar, du skall ut med här och nu, så derför skall nuvärdet NV anges som ett negativt tal:

N	12
R%	5
NV	-500
PMT	0
FV	?

with(*GymSE*) :

$TVM(N=12, R\%=5, NV=-500)$

$$FV = 897.9281630 \tag{6.1}$$

Alltså kommer det att stå 712.88 kr på kontot (i framtiden).

6.3 Exempel 2

Ett belopp på 6500 kr har växt till 11402.48 kr vid 20 räntetillskrivningar.

Vad har räntan varit?

N	20
$R\%$	?
NV	-6500
PMT	0
FV	11402.48

$TVM(N=20, NV=-6500, FV=11403.48)$

$$R\% = 2.850451476 \tag{6.2}$$

Räntan har alltså varit 2.85%

6.4 Exempel 3 (Sparande)

Hur lång tid tar det att spara 100000 kr med en månatlig inbetalning på 3000 kr och en månatlig ränta på 0.5% ?

N	?
$R\%$	0.5
NV	0
PMT	-3000
FV	100000

$with(GymSE):$
$TVM(R\%=0.5, NV=0, PMT=-3000, FV=100000)$

$$N = 30.90714724 \tag{6.3}$$

Alltså ca. 31 månader.

6.5 Exempel 4 (Återbetalning av skuld)

Ett annuitetslån på 500000 kr med en terminsränta på 6% skall återbetalas på 30 terminer.

Hur stor skall en annuitet vara?

N	30
$R\%$	6
NV	0
PMT	?

FV	500000

$with(GymSE)$:

$TVM(N = 30, R\% = 6, NV = 50000, FV = 0)$

$$PMT = -3632.445575 \tag{6.4}$$

Detta visar, att du skall inbetala 3632.45 kr per termin. Talet är negativt, eftersom det är en utgift för dig.

7 Statistik

7.1 Fördelningar

Binomialfördelningen

GymSE-paketet innehåller fördelningsfunktionen *bincdf* , täthetsfunktionen *binpdf* och den inversa funktionen *invbin* för att bestämma fraktiler hos denna fördelning.

Alla funktioner kräver frekvens- och sannolikhetsparameter som input.

Som exempel ser vi på ett binomialexperiment som utförs 50 gånger och där sannolikheten är 0.4 att ett experiment lyckas.

Vi observerar hur många gånger experimentet lyckas.

Sannolikheten för att experimentet lyckas precis 16 gånger är

$with(GymSE):$

$binpdf(50, 0.4, 16) = 0.06058889738$

Sannolikheten för att experimentet lyckas högst 16 gånger är:

$bincdf(50, 0.4, 16) = 0.1560906047$

och sannolikheten fför att experimentet lyckas minst 16 gånger är

$1 - bincdf(50, 0.4, 15) = 0.9044982926$

För att beräkna 95%-fraktilen i denna fördelning används

$invbin(50, 0.4, 0.95) = 26.$

vilket betyder att 26 är den största observation, vars kumulerade sannolikhet är mindre än eller lika med 0.95. Låt oss kontrollera:

$bincdf(50, 0.4, 25) = 0.9426562393$

$bincdf(50, 0.4, 26) = 0.9685944467$

Normalfördelningen

GymSE-paketet innehåller fördelningsfunktionen *normalcdf* , täthetsfunktionen *normalpdf* och den inversa funktionen *invnorm* för att bestämma fraktiler hos denna fördelning.

Funktionerna har medelvärde och spridning som valfria parametrar, och utlämnas dessa är standardvärdena $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. Till exempel är

$with(GymSE):$

$normalcdf(1) = 0.8413447460$

och handlar det om en normalfördelning med $\mu = 100$ och $\sigma = 10$, hittas värdet vid exempelvis 105 genom

$normalcdf(100, 10, 105) = 0.6914624612$

- som naturligvis även kan beräknas som

$$\int_{-\infty}^{105} normalpdf(100, 10, t)\, dt = 0.6914624609$$

För att beräkna 95%-fraktilen i denna fördelning används

$invnorm(100, 10, 0.95) = 116.448536269521$

t - fördelningen

GymSE-paketet innehåller här fördelningsfunktionen *tcdf*, täthetsfunktionen *tpdf* och inversen *invt* för att beräkna fraktiler i t-fördelningen.

Alla funktioner kräver antalet frihetsgrader som parameter. Till exempel fås värdet för 0.7 av t-fördelningen med 5 frihetsgrader så här

$tcdf(5, 0.7) = 0.742425525842592$

- som naturligvis även kan beräknas som

$$\int_{-\infty}^{0.7} tpdf(5, x)\, dx = 0.7424255256$$

För att beräkna 95%-fraktilen i denna fördelning används

$invt(5, 0.95) = 2.01504256032808$

Chi2 - fördelningen

GymSE-paketet innehåller här fördelningsfunktionen *chicdf*, täthetsfunktionen *chipdf* och inversen *invchi* för att beräkna fraktiler i χ^2-fördelningen.

Alla funktioner kräver antalet frihetsgrader som parameter. Till exempel fås värdet för 4 av χ^2-fördelningen med 5 frihedsgrader så här

$chicdf(5, 4) = 0.4505840491$

- som naturligvis även kan beräknas som

$$\int_{-\infty}^{4} chipdf(5, x)\, dx = 0.4505840485$$

För att beräkna 95%-fraktilen i denna fördelning används

$invchi(5, 0.95) = 11.0704974062099$

7.2 Konfidensintervall

Konfidensintervall för andelen p i binomialfördelningen

Antag att i ett stickprov på n = 180 personer är x = 40 personer emot högre skatt. Ett konfidensintervall för andelen p av personer, som är emot högre skatt beräknas

$with(GymSE):$

$zIntervallAndel(40, 180, 0.95) = [0.161488 , 0.282956]$

I stället för att använda antalet positiva som input, kan andelen p användas.

$$zIntervallAndel\left(\frac{40}{180}, 180, 0.95\right) = [0.161488 , 0.282956]$$

Konfidensintervall för i normalfördelningen (känd)

$obs := [229.4, 229.7, 230.2, 230.2, 232, 231.2, 230, 230.6, 230, 229.4, 230.9, 228.5, 231.5, 230.9, 231.2, 227.9, 230.6, 232, 230.3, 232.3]:$

Man vet att observationerna är normalfördelade med standardavvikelse $\sigma = 1.5$.

95%-konfidensintervallet för medelvärdet beräknas genom:

$with(GymSE):$

$zIntervall(obs, 1.5, 0.95) = [229.782608094715 , 231.097391905285]$

Vid användning av 4-parameterversionen skall antalet observationer samt estimat för medelvärdet och standardavvikelsen vara kända. Om till exempel

$\overline{x} = 267$, $n = 400$ och $\sigma = 50$, kan 95%-konfidensintervallet för medelvärdet beräknas genom *zIntervall*(267, 50, 400, 0.95) = [262.100090038651 , 271.899909961349]

Konfidensintervall för i normalfördelningen (okänd)

obs := [5, 4.4, 5.7, 5.6, 5.5, 5.2, 5.0, 4.8, 3.6, 4.1, 4.6, 4.9, 4.0, 6.7, 5.5, 5.4, 6.7, 5.8, 5.4, 4.8, 5.9, 5.1, 3.8, 4.1, 6.7] :

Man vet att observationerna är normalfördelade. 95%-konfidensintervallet för medelvärdet beräknas genom:

with(*GymSE*) :

tIntervall(*obs*, 0.95) = [4.77418085650167 , 5.48981914349834]

Vid användning av 4-parameterversionen skall antalet observationer samt estimat för medelvärdet och standardavvikelsen vara kända. Om till exempel $\overline{x} = 120$, $s = 15$ och $n = 68$, kan 95%-konfidensintervallet för medelvärdet bestämmas genom

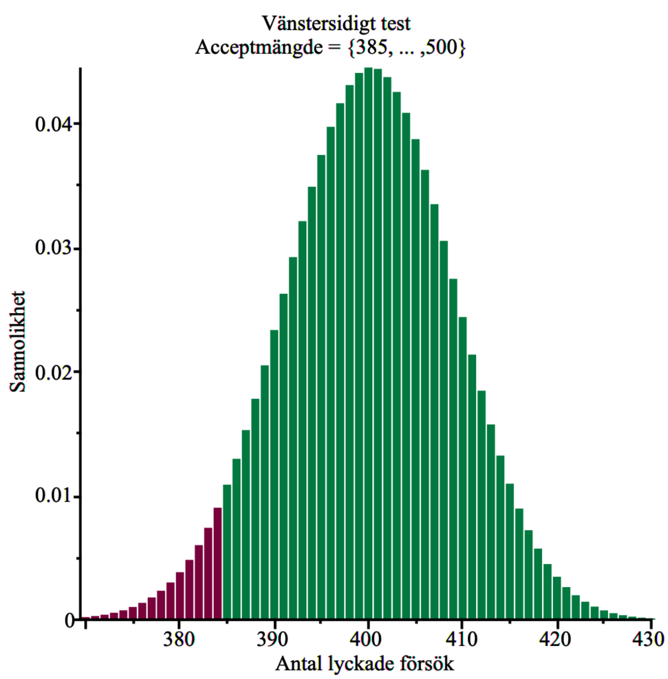
tIntervall(120, 15, 68, 0.95) = [116.369226496765 , 123.630773503235]

7.3 Statistiska test

Binomialtest

Kommandot *binomialTest* returnerar ett stolpdiagram, som visar den kritiska mängden och acceptmängden vid ett vänstersidigt, högersidigt eller tvåsidigt test, där summan av de röda staplarna är mindre än signifikansnivån.

with(*GymSE*) :



z-test för ett medelvärde (standardavvikelse känd)

$obs := [229.4, 229.7, 230.2, 230.2, 232, 231.2, 230, 230.6, 230, 229.4, 230.9, 228.5, 231.5, 230.9, 231.2, 227.9, 230.6, 232, 230.3, 232.3]:$

Man vet att observationerna är normalfördelade med standardavvikelse $\sigma = 1.5$. Test av hypotesen

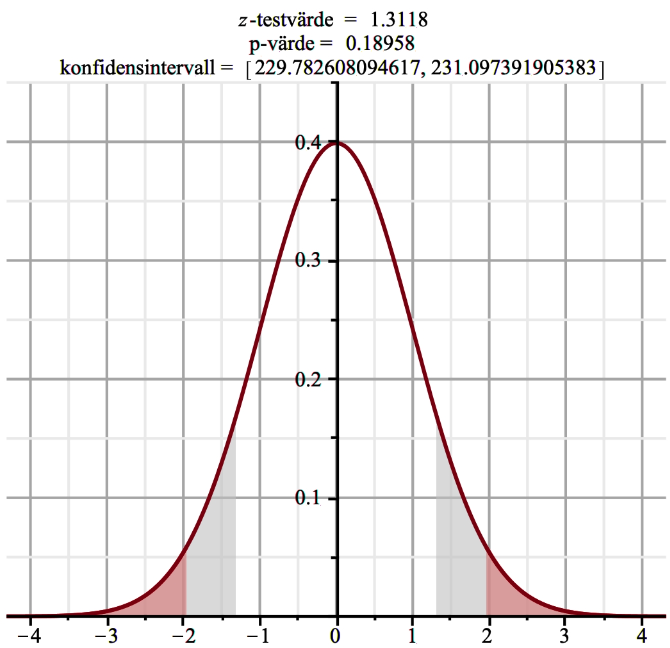
$H: \mu = 230$

mot alternativet

$H_0: \mu \neq 230$

på nivå 5%, sker med kommandot

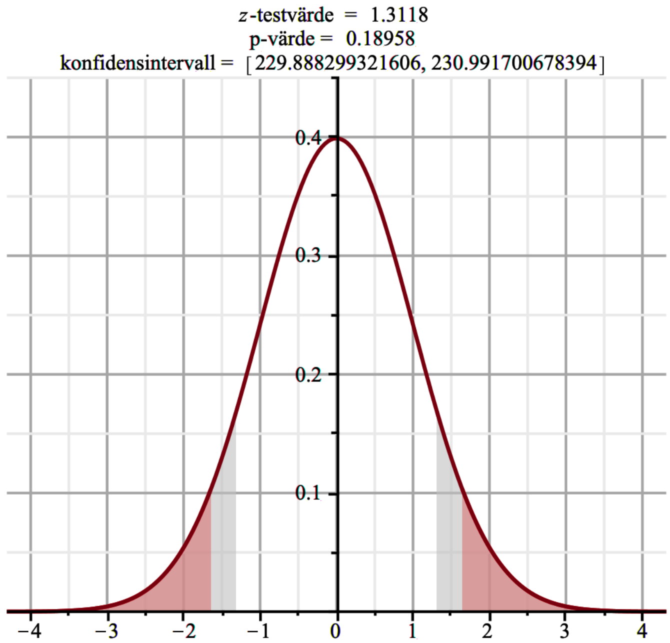
$zTest(obs, 230, 1.5)$



Det kritiska området och p-värdet visas som skuggade områden under den standardiserade normalfördelningsgrafen.

Som standard är konfidensnivån satt 95%. Önskas man ändra detta till exempelvis 90% tillfogas parametern *konfidens* $= 0.9$:

$zTest(obs, 230, 1.5, konfidens = 0.9)$



t-test för ett medelvärde (standardavvikelse okänd)

$obs := [5, 4.4, 5.7, 5.6, 5.5, 5.2, 5.0, 4.8, 3.6, 4.1, 4.6, 4.9, 4.0, 6.7, 5.5, 5.4, 6.7, 5.8, 5.4, 4.8, 5.9, 5.1, 3.8, 4.1, 6.7]:$

Man vet att observationerna är normalfördelade. Test av hypotesen

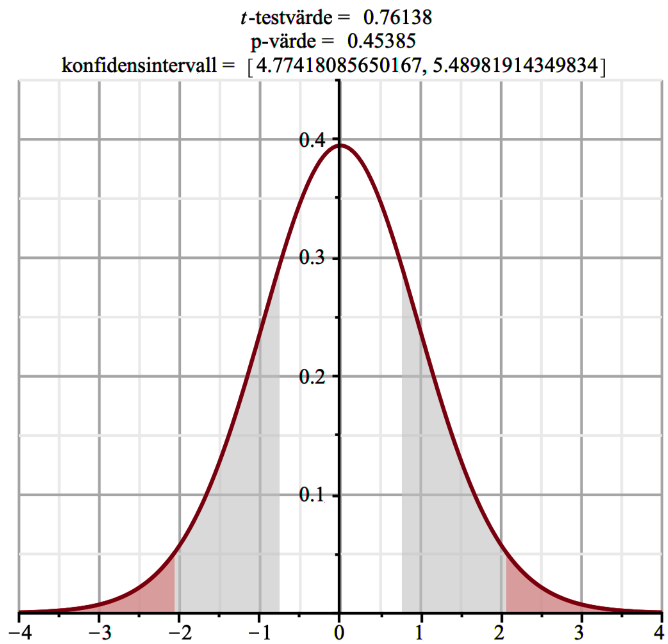
$H: \mu = 230$

mot alternativet

$H_0: \mu \neq 230$

på nivå 5%, sker med kommandot

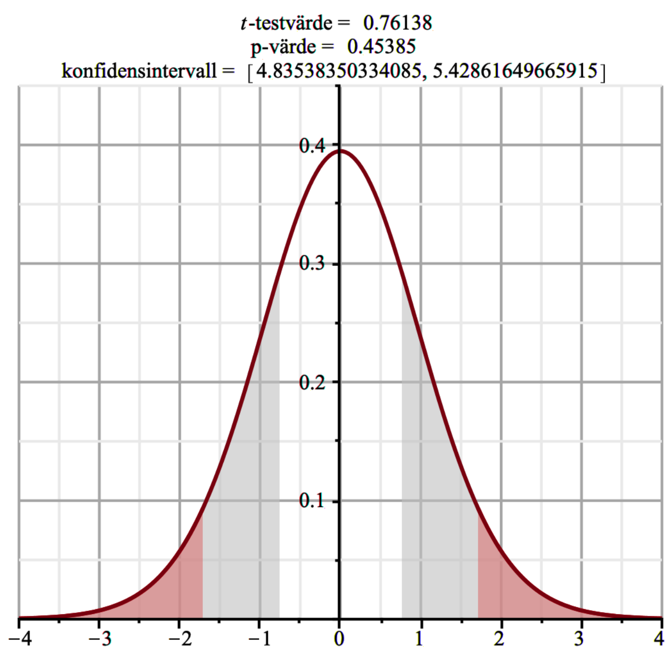
$tTest(obs, 5)$



Det kritiska området och p-värdet visas som skuggade områden under den standardiserade normalfördelningsgrafen.

Som standard är konfidensnivån satt 95%. Önskas man ändra detta till exempelvis 90% tillfogas parametern $konfidens = 0.9$:

$tTest(obs, 5, konfidens = 0.9)$



chi2-test

GymSE-paketet innehåller ett antal funktioner för användning i samband med chi2-test:

fTabell

- är en hjälpfunktion för användning i samband med räkning av data efter indelningskriterier. Typisk hämtas data från till exempel Excel.

$fTabell(M)$

M är en matris som i 1. kolonnen innehåller det första indelningskriteriet (här: Man, Kvinna) och i 2. kolonnen det andra indelningskriteriet (här: Internet, Radio eller TV, Tidningar). Resultatet visas i en *frekvensstabell* som denna (som givetvis även kan skrivas in direkt om resultatet redan föreligger).

$$A := \begin{bmatrix} \text{"Observerat"} & \text{"Internet"} & \text{"Radio eller TV"} & \text{"Tidningar"} & \text{"total"} \\ \text{"Kvinna"} & 103 & 369 & 171 & 643 \\ \text{"Man"} & 80 & 180 & 97 & 357 \\ \text{"total"} & 183 & 549 & 268 & 1000 \end{bmatrix}:$$

förväntad

- är en hjälpfunktion för att beräkna förväntade värden i en tabell under förutsättning av oberoende mellan indelningskriterierna. Här används frekvenstabellen som input:

$förväntad\,(A)$

$$\begin{bmatrix} \text{"Förväntad"} & \text{"Internet"} & \text{"Radio eller TV"} & \text{"Tidningar"} & \text{"total"} \\ \text{"Kvinna"} & 117.67 & 353.01 & 172.32 & 643 \\ \text{"Man"} & 65.331 & 195.99 & 95.676 & 357 \\ \text{"total"} & 183 & 549 & 268 & 1000 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

Finns den inte tillgänglig kan man istället använda matrisen av observerade värden

$$obs := \begin{bmatrix} 103 & 369 & 171 \\ 80 & 180 & 97 \end{bmatrix}:$$

$förväntad\,(obs)$

$$\begin{bmatrix} 117.67 & 353.01 & 172.32 \\ 65.331 & 195.99 & 95.676 \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

bidrag

- beräknar de enskilda "cellernas" bidrag till χ^2-testvärdet. Här används frekvenstabellen som input.

bidrag(*A*)

$$\begin{bmatrix} \text{"Bidrag"} & \text{"Internet"} & \text{"Radio eller TV"} & \text{"Tidningar"} & \text{"total"} \\ \text{"Kvinna"} & 1.828685219 & 0.7245636744 & 0.01017255867 & 2.563421452 \\ \text{"Man"} & 3.293682341 & 1.305026450 & 0.01832200343 & 4.617030794 \\ \text{"total"} & 5.122367560 & 2.029590124 & 0.02849456210 & 7.180452246 \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

Finns den inte tillgänglig kan man istället använda matrisen av observerade värden

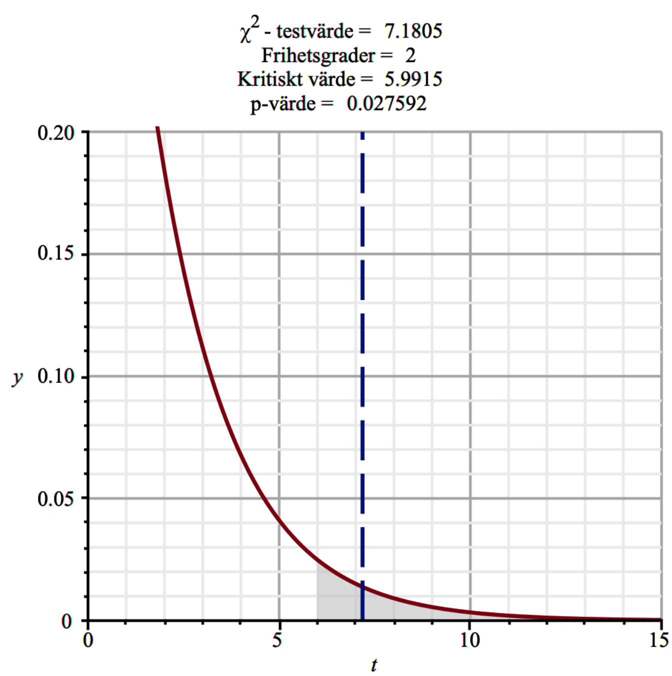
bidrag(*obs*)

$$\begin{bmatrix} 1.828685219 & 0.7245636744 & 0.01017255867 \\ 3.293682341 & 1.305026450 & 0.01832200343 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

Chi2Utest

beräknar ett chi2-test för oberoende i en matris. Här används frekvenstabellen som input. Finns den inte tillgänglig kan man istället använda matrisen *obs* av observerade värden

chi2Utest(*A*)



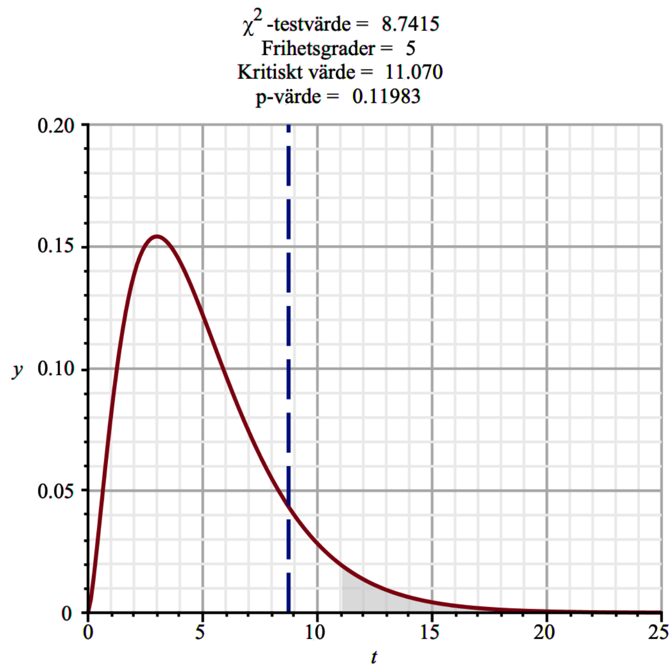
Chi2GOFtest

beräknar ett chi2-test för Godness of Fit mellan en observerad lista och en förväntad lista:

obs := [5, 4, 5, 6, 5, 13] :

$förv := [6.33, 6.33, 6.33, 6.33, 6.33, 6.33]:$

$chi2GOFtest(obs, förv)$



8 Ekvationslösning

8.1 intervallsolve och fintervallsolve

Skall du lösa en ekvation som till exempel $\sin(x) = \frac{1}{2}$ i intervallet $[0, \pi]$ kommer intervalsolve genast att ge dig båda lösningarna:

$with(GymSE):$

$intervallsolve\left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x = 0..\pi\right)$

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \tag{8.1}$$

och i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$:

$intervallsolve\left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x = -2\pi..2\pi\right)$

$$\left[-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \tag{8.2}$$

Motsvarande för ekvationen $Sin(x) = \frac{1}{2}$:

$intervallsolve\left(Sin(x) = \frac{1}{2}, x = 0..180\right)$

$$[30.00000000, 150.0000000] \tag{8.3}$$

där lösningarna ges i grader.

Om du vill ha närmevärden till rötterna använder du istället *fintervallsolve*:

$fintervallsolve\left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x = 0..\pi\right)$

$$[0.5235987756, 2.617993878] \tag{8.4}$$

Löser du en ekvation som $(x^3 - 8) \cdot \ln(x) = 0$ med kommandot *solve* för du även de komplexa lösningarna:

$solve((x^3 - 8) \cdot \ln(x) = 0)$

$$1, 2, -1 - I\sqrt{3}, -1 + I\sqrt{3} \tag{8.5}$$

Kommandot *intervallsolve* ger bara de reella lösningarna i angivet intervall

$intervallsolve((x^3 - 8) \cdot \ln(x) = 0, x = 0..\infty)$

$$[1, 2] \tag{8.6}$$

Motsvarande sker i en ekvation som denna

$2 \cdot (1 + r)^7 = 3.5$

medan *intervallsolve* bara ger den reella roten.

$intervallsolve\left(2 \cdot (1 + r)^7 = 3.5, r = 0 ..1\right)$

$$[0.08322761046] \tag{8.7}$$

8.2 nollställen

I en ekvation som denna

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

kommer *solve* att ge två reella och två komplexa lösningar. Om vi bara är intresserade av de reella rötterna kan man använda kommandot nollställen:

$with(GymSE):$

$nollställen\left(x^4 - 3x^2 - 4 = 0\right)$

$$[-2, 2] \tag{8.8}$$

Vill du bara ha de positiva rötterna kan du tillfoga ett intervall:

$nollställen\left(x^4 - 3x^2 - 4 = 0, x = 0 .. \infty\right)$

$$[2] \tag{8.9}$$

Ekvationen

$\left(x^3 - 8\right) \cdot \ln(x) = 0$

kan lösas så här:

$nollställen\left(\left(x^3 - 8\right) \cdot \ln(x) = 0, x\right)$

$$[1, 2] \tag{8.10}$$

Motsvarande för ekvationen

$nollställen\left(2 \cdot (1 + r)^7 = 4\right)$

$$\left[2^{1/7} - 1\right] \tag{8.11}$$

och om du vill ha närmevärden tillfogar du *numeric*:

$nollställen\left(2 \cdot (1 + r)^7 = 4, numeric\right)$

$$[0.1040895137] \tag{8.12}$$

8.3 reellSolve

Kommandot *reellSolve* värkar som Maples inbyggda *solve*, bortsett från att domänen i *reellSolve* är begränsad till de reella talen.

$with(GymSE):$

$reellSolve\left(x^4 - x^2 - 2 = 0\right)$

$$-\sqrt{2}, \sqrt{2} \tag{8.13}$$

Här är de två komplexa lösningarna $\pm I$ inte med.

Du kan råka ut för att lösningarna returneras som *RootOf*

$reellSolve\left(x^4 - 5\,x^2 - 4 = 0\right)$

$$RootOf\left(\_Z^4 - 5\,\_Z^2 - 4, -2.387794495\,..-2.38779354\right), RootOf\left(\_Z^4 - 5\,\_Z^2 - 4, 2.38779354\,..2.387794495\right) \tag{8.14}$$

Detta unviks genom att tillfoga parametern *explicit* :

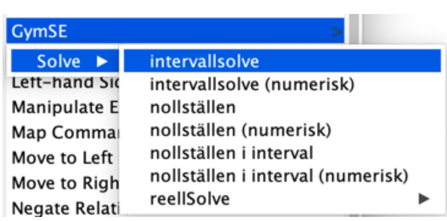
$reellSolve\left(x^4 - 5\,x^2 - 4 = 0, explicit\right)$

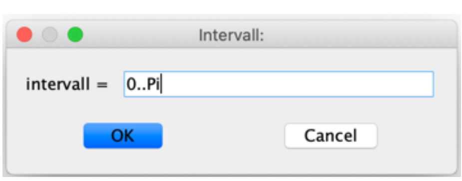
$$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{41}}}{2}, -\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{41}}}{2} \tag{8.15}$$

8.4 Ekvationslösning med kontextmenyn

Alla ovanstående rutiner för ekvationslösning är tillgängliga i kontextmenyn

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{intervallsolve} \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\,\pi}{6}\right]$$





$$x^4 - 3\,x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{nollställen} [-2, 2]$$